PART2　空間ベクトルの内積

2　直方体 ABCD－EFGH において，AB＝4，AD＝2，AE＝1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ のなす角は 120° より大きいか小さいかを調べよ。

Point Pickup

空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，2つのベクトルの和や差を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

のようにベクトルを分割し，指定されたベクトルを用いて表すことができる。

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \iff \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

第12講　PART2　確認問題

1　直方体 ABCD-EFGH において，$\mathrm{AB}=\sqrt{11}$，$\mathrm{AD}=4$，$\mathrm{AE}=3$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=$ [ア]，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=$ [イ]

[[ア]，[イ] の選択肢]

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $\vec{b}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{c}$

④ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑥ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑦ $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}=$ [ウエ]

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の大きさについて，不等式 [オ] が成り立つ。

[オ] に当てはまるものとして最も適切なものを選択肢から選べ。

[[オ] の選択肢]

① $0^\circ<\theta<30^\circ$　② $30^\circ<\theta<45^\circ$

③ $45^\circ<\theta<60^\circ$　④ $60^\circ<\theta<90^\circ$

⑤ $90^\circ<\theta<120^\circ$　⑥ $120^\circ<\theta<135^\circ$

⑦ $135^\circ<\theta<150^\circ$　⑧ $150^\circ<\theta<180^\circ$

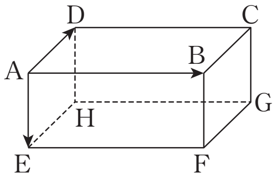
PART2　空間ベクトルの内積

2　直方体 ABCD－EFGH において，AB＝4，AD＝2，AE＝1 とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}$ を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角は 120° より大きいか小さいかを調べよ。



(1)　$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(別解)　$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$=|\vec{b}+\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2=2^2+1^2-4^2=-11$$

(3)　$|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{4^2+2^2+1^2}=\sqrt{21}$，$|\overrightarrow{BH}|=\sqrt{21}$

$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|}=-\frac{11}{\sqrt{21}\sqrt{21}}=-\frac{11}{21}<-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$$

よって，なす角は 120° より大きい。

第12講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：⑥，ウエ：-7，オ：⑤

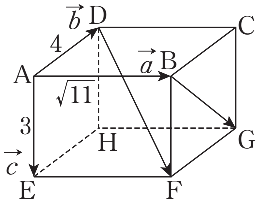
[解説]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ [A]

$=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}$

$=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}$



(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$=-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=-4^2+3^2$$

$$=\boldsymbol{-7}$$

(3) $$|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DF}}|=\sqrt{(\sqrt{11})^2+4^2+3^2}=6$$

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角 θ について

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BG}}||\overrightarrow{\mathrm{DF}}|}=\frac{-7}{5\times6}=-\frac{7}{30}$$ [B]

ここで，$-\frac{1}{2}<-\frac{7}{30}<0$ であるから

$$\cos120^\circ<\cos\theta<\cos90^\circ$$

よって　$\boldsymbol{90^\circ<\theta<120^\circ}$

[A]　空間ベクトルにおいても，平面の場合と同様，2 つのベクトルの和や差を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

のようにベクトルを分割し，指定されたベクトルを用いて表すことができる。

[B]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を $\theta\,(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\Longleftrightarrow\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$